

Exercice :

Soit le rotor appuyé à ces deux extrémités. Il est constitué d'un arbre flexible creux et d'un disque rigide situé au milieu de l'arbre. Les propriétés mécaniques et géométriques du système arbre-disque sont comme suit: $E = 207 \text{ GPa}$, $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$;

Arbre : Longueur = 457 mm, Rayon intérieur = 12,7 mm, Rayon extérieur = 17,7 mm.

Disque : Rayon extérieur = 88,5 mm ; Epaisseur = 4,425 mm.

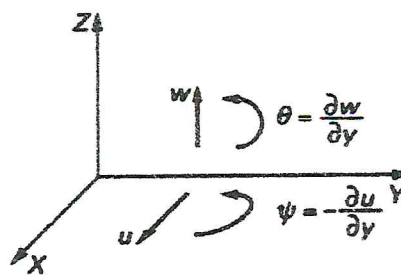
Les fonctions de déplacement sont celles du premier mode d'une poutre uniforme homogène, en flexion et appuyée aux deux extrémités, soit: $F(y) = \sin(\pi y/L)$.

Voir la figure ci-dessous où:

- ✓ u et w sont les déplacements dans les directions X et Z ,
- ✓ q_1 et q_2 sont les coordonnées généralisées indépendantes,
- ✓ θ et ψ sont les pentes (angles) autour de X et Z .

En adoptant la théorie d'Euler-Bernoulli :

1. Déterminer l'énergie cinétique, et l'énergie de déformation du système.
2. Par la méthode de Rayleigh-Ritz en utilisant la méthode de Lagrange, établir les équations différentielles du mouvement du système en fonction de q_1 et q_2 .
3. Déterminer les premières fréquences naturelles ω_1 et ω_2 de flexion des modes directe et rétrograde en fonction de la vitesse de rotation Ω .
4. Déduire les valeurs de ces fréquences dans le cas stationnaire et lorsque $\Omega = 10^3 \text{ tr/mn}$.
5. Déterminer les premières vitesses de rotation critiques Ω_{c1} et Ω_{c2} des modes directe et rétrograde (sans tracer le diagramme de Campbell).



Corrigé de l'examen MC 912 (DDMT)

M2CM

EXERCICE:

1) les données physiques et géométriques du système :

Arbre : $L = 0,457 \text{ m}$; $R_{in} = 0,0127 \text{ m}$; $R_{ex} = 0,0177 \text{ m}$

(0,5) $S = \pi(R_{ex}^2 - R_{in}^2) = 4,775 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$; $\rho = 7800 \text{ Kg/m}^3$.

(0,5) $I = \frac{\pi}{4}(R_{ex}^4 - R_{in}^4) = 5,666 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$; $E = 207 \cdot 10^9 \text{ Pa}$.

Disque : $h = 0,00425 \text{ m}$, $R_{in} = 0,0177 \text{ m}$; $R_{ex} = 0,0885 \text{ m}$

(0,5) $M_d = \pi(R_{ex}^2 - R_{in}^2) \cdot h \cdot \rho = 0,816 \text{ Kg}$.

(0,5) $I_{dx} = I_{dz} = \frac{M_d}{12}(3R_{ex}^2 + 3R_{in}^2 + h^2) = 1,663 \cdot 10^{-3} \text{ Kg m}^2$

(0,5) $I_{dx} = \frac{M_d}{2}(R_{ex}^2 + R_{in}^2) = 3,323 \cdot 10^{-3} \text{ Kg m}^2$.

$\rho = 7800 \text{ Kg/m}^3$; $E = 207 \cdot 10^9 \text{ Pa}$, le disque au $L_1 = 0,2285 \text{ m}$ milieu:

les déplacements sont :

$$U(y,t) = \sin \frac{\pi y}{L} \cdot q_1 ; \quad \theta = \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi y}{L} \cdot q_2$$

$$W(y,t) = \sin \frac{\pi y}{L} \cdot q_2 ; \quad \psi = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi y}{L} \cdot q_1$$

$$E_{cd} = \frac{1}{2} M_d (\dot{U}^2 + \dot{W}^2) + \frac{1}{2} I_{dx} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_{dy} (\dot{U}^2 + 2\dot{U}\dot{\psi}\theta)$$
$$= 0,408 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + 1,662 \cdot 10^{-3} \dot{U}^2$$

$$E_{ca} = \frac{\rho S L}{2} \int_0^L (\dot{U}^2 + \dot{W}^2) dy + \frac{\rho I}{2} \int_0^L (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy + \rho I L \dot{U}^2 + 2 \rho I L \dot{U} \dot{\psi} \theta dy$$
$$= 0,428 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + 2,02 \cdot 10^{-4} \dot{U}^2 - 9,546 \cdot 10^{-3} \dot{U} \dot{q}_1 \dot{q}_2$$

$$E_c = 0,836 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - 9,546 \cdot 10^{-3} \dot{U} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + 1,864 \cdot 10^{-3} \dot{U}^2$$

$$E_d = E_{da} = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy$$

$$E_d = 2,993 \cdot 10^6 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)$$

2) En appliquant l'équation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} + \frac{\partial E_d}{\partial q_i} = 0 \quad \text{avec } (i=1,2)$$

on trouve:

$$\begin{cases} 1,672 \ddot{q}_1 - 9,546 \cdot 10^{-3} \nu \dot{q}_1 + 5,986 \cdot 10^6 q_1 = 0 \\ 1,672 \ddot{q}_2 + 9,546 \cdot 10^{-3} \nu \dot{q}_1 + 5,986 \cdot 10^6 q_2 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

3) on prend: $q_1 = Q_1 e^{rt}$ et $q_2 = Q_2 e^{rt}$ avec $r = \pm j\omega$: (0,5)

$$\begin{bmatrix} (5,986 \cdot 10^6 + 1,672 r^2) & -9,546 \cdot 10^{-3} r \nu \\ 9,546 \cdot 10^{-3} r \nu & (5,986 \cdot 10^6 + 1,672 r^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

on peut utiliser:

$$\begin{cases} m \ddot{q}_1 - a \nu \dot{q}_2 + K q_1 = 0 \\ m \ddot{q}_2 + a \nu \dot{q}_1 + K q_2 = 0 \end{cases}$$

Dans notre cas: $m = 1,672$; $a = 9,546 \cdot 10^{-3}$ et $K = 5,986 \cdot 10^6$.

(1,5) Alors $\omega_{1,2} = \sqrt{\omega_{10}^2 + \frac{a^2 \nu^2}{2m^2} \left(1 \mp \sqrt{1 + \frac{4m^2 \omega_{10}^2}{a^2 \nu^2}} \right)}$ * mode directe
* mode inverse

4) avec $\omega_{10} = \omega_{20} = \omega_1 (\nu = 0) = \sqrt{\frac{K}{m}} = 1892,127 \text{ rad/s}$.

Si $\nu = 10^3 \text{ tour/mn} = 104,720 \text{ rad/s} \approx 301,141 \text{ Hz}$. (1)

(1) $\omega_1 = 1891,828 \text{ rad/s} = 301,094 \text{ Hz}$ (Mode inverse)

(1) $\omega_2 = 1892,426 \text{ rad/s} = 301,189 \text{ Hz}$ (Mode directe)

5) $\omega_{m1} = \sqrt{\frac{K}{m+a}} = 1886,748 \text{ rad/s} \approx 18017 \text{ tr/mn}$. (1)

$\omega_{m2} = \sqrt{\frac{K}{m-a}} = 1897,551 \text{ rad/s} \approx 18120 \text{ tr/mn}$. (1)

Boukhalfa A